Birthday Theorem 1 *Seien* $r_1, r_2, \ldots, r_n \in \{1, \ldots, B\}$ *unabhängig, identisch verteilte Integer, dann gilt:*
$n \approx \sqrt{2 \cdot ln2} \cdot \sqrt{B} \approx 1,18 \cdot \sqrt{B} \Rightarrow P[\exists i \neq j : r_i = r_j] \geq 0,5$

Beweis:
OBdA seien die r_i *gleichmäßig unabhängig (ungünstigster Fall)*

$$
\begin{aligned}
P[\exists i \neq j : r_i = r_j] &= 1 - P[\forall i \neq j : r_i \neq r_j] \\
&= 1 - \Big(\frac{B-1}{B}\Big)\Big(\frac{B-2}{B}\Big)\ldots\Big(\frac{B-n+1}{B}\Big) \\
&= 1 - \prod_{i=1}^{n-1}\Big(1 - \frac{i}{B}\Big),\ wg.\ (e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} \ldots \geq 1 - x\ f\ddot{u}r\ x \geq 0) \\
&\geq 1 - \prod_{i=1}^{n-1} e^{-\frac{i}{B}} \\
&= 1 - e^{-\frac{1}{B}\sum_{i=1}^{n-1} i} \\
&\geq 1 - e^{-\frac{n^2}{2B}} \approx 1 - e^{-\frac{1,18^2}{2}} \approx 1 - e^{-0,72} \\
&> 0,5
\end{aligned}
$$

qed

Beispiel:
Wieviele Personen reichen, um mit 50%iger Wahrscheinlichkeit zu erreichen, dass zwei Personen am gleichen Tag Geburtstag haben?

$F\ddot{u}r\ \#(Personen) \approx 1,18 \cdot \sqrt{365} \approx 23\ gilt:$
$P[\exists Person_i \neq Person_j : Geburtstag_i = Geburtstag_j] > 0,5$

Anmerkung: Die Geburtstage sind zwar nicht gleichverteilt, die Angabe stimmt aber „erst recht“.